2023年度全学統一入学試験問題

数　学【理工学部】

（2月3日）

開始時刻　午後1時00分
終了時刻　午後2時00分

I　注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は6ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督員の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。
   ①　受験番号欄
   受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
   ②　氏名欄
   氏名とフリガナを記入してください。
4. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ または $\boxed{5}$ を選択してください。
   （$\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します。）
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

※　解答上の注意は裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

$\boxed{1}$ 以下の各問いに答えよ。

問 1 a を 4 より大きい定数とし，x の関数 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1 \, (0 \leqq x \leqq a)$ の最大値を M，最小値を m とする。

$a = 6$ のとき，$M = \boxed{\text{ア}}$，$m = \boxed{\text{イウ}}$ である。

また，$a > 8$ のとき，$M + m = 0$ となる a の値は，$a = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

問 2 次のような 4 つの値からなる変量 x のデータがある。

x	1	3	5	15

さらに，変量 y を $y = \frac{15}{x}$ で定める。

このとき，x の分散は $\boxed{\text{キク}}$，x と y の相関係数は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

ただし，相関係数の値 $\boxed{\text{ケ}}$ については，次の選択肢の中から最も近い値の番号を答えよ。

⓪ -0.9　① -0.7　② -0.5　③ -0.3　④ -0.1

⑤ 0.1　⑥ 0.3　⑦ 0.5　⑧ 0.7　⑨ 0.9

問 3 a，b を $a \leqq b$ である自然数とし，a と b の最大公約数を g，最小公倍数を l とする。

$\frac{l}{g} = 12$ であるとき，$\frac{b}{a} = \boxed{\text{コサ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

問 4　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$$\sin\theta + \cos\theta = r\sin(\theta + \alpha) \quad (\text{ただし，} r > 0,\ -\pi < \alpha \leqq \pi)$$

を満たす定数 r と α の値は，

$$r = \sqrt{\boxed{セ}}\ ,\quad \alpha = \frac{\pi}{\boxed{ソ}}$$

である。

次に，$\sin\theta + \cos\theta = t$ とおくと，$-\sqrt{\boxed{タ}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{チ}}$ である。ここで，$\sin 2\theta$ を t で表すと，

$$\sin 2\theta = t^{\boxed{ツ}} - \boxed{テ}$$

である。

また，等式

$$\sin 2\theta = \sin\theta + \cos\theta + 1 \quad \cdots\cdots ①$$

を t を用いて表すと，$t^2 - t - \boxed{ト} = 0$ である。

したがって，①を満たす θ は二つ存在し，それらの和は $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\pi$ である。

$\boxed{2}$ 公比が正の実数である等比数列$\{a_n\}$が次の条件を満たしている。

$$a_3 = 6^{12} \quad , \quad a_7 = 6^{10}$$

このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1 数列$\{a_n\}$の初項は $a_1 = 6^{\boxed{アイ}}$，一般項は $a_n = 6^{\frac{\boxed{ウエ}-n}{\boxed{オ}}}$ である。

問 2 数列$\{b_n\}$を

$$b_n = \log_6 a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

このとき，$\{b_n\}$は初項 $\boxed{カキ}$，公差 $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ の等差数列である。

問 3 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項の積を T_n とする。

すなわち，

$$T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定める。このとき，

$$T_n = 6^{\frac{n(\boxed{サシ}-n)}{\boxed{ス}}}$$

である。

問 4 **問 3** で定めた T_n の最大値は $6^{\frac{\boxed{セソタ}}{\boxed{チ}}}$ であり，その整数部分は $\boxed{ツテト}$ 桁である。

ただし，$\log_{10} 6 = 0.78$ とする。

3 △OAB において，辺 OA を 1：3 に内分する点を C，辺 OB を 1：2 に内分する点を D，直線 AD と直線 BC の交点を P とする。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\vec{b}$$

である。

問 2 OA⊥BC かつ OB⊥AD であるとき，$|\vec{a}|^2$，$|\vec{b}|^2$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表すと，

$$|\vec{a}|^2=\boxed{\text{サ}}\,\vec{a}\cdot\vec{b}\quad,\quad|\vec{b}|^2=\boxed{\text{シ}}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

であり，さらに，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

問 3 OA⊥BC かつ OB⊥AD かつ △OAB の面積が $\sqrt{11}$ であるとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ソ}},\ |\vec{a}|=\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}},\ |\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

したがって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{テトナ}}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$$

である。

$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ **のうちどちらか一方を選択して解答せよ。**

$\boxed{4}$ x の関数

$$f(x) = x^2 - (9|x| + x) + 16$$

について，以下の各問いに答えよ。

問 1 $f(x)$を絶対値記号を用いずに表すと，

$x < 0$ のとき，$f(x) = \left(x + \boxed{ア}\right)^2$

$x \geqq 0$ のとき，$f(x) = \left(x - \boxed{イ}\right)\left(x - \boxed{ウ}\right)$

である。ただし，$\boxed{イ} < \boxed{ウ}$ とする。

問 2 $y = f(x)$のグラフと x 軸で囲まれる二つの部分のうち，$y \leqq 0$ を満たす図形の面積を S_1，$y \geqq 0$ を満たす図形の面積を S_2 とすると，

$S_1 = \boxed{エオ}$ ，$S_2 = \boxed{カキ}$

である。

問 3 t を負の定数とする。

$y = f(x)$のグラフ上の点$(t,\ f(t))$における接線の方程式を t を用いて表すと，

$y = \boxed{ク}\left(t + \boxed{ケ}\right)x - t^2 + \boxed{コサ}$ ……①

となり，この直線が $y = f(x)$のグラフの $x > 0$ の部分と再び接するとき，$t = \dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ である。

問 4 **問 3** に関して，$t = \dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ のときの直線①と $y = f(x)$のグラフで囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ソタチ}}{\boxed{ツ}}$ である。

5 x，y を 0 以上の実数とし，方程式 $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt{y}=1$ ……① が表す座標平面上の曲線を C とするとき，以下の各問いに答えよ。

問 1 方程式①を満たす実数 x，y のとりうる値の範囲は，

$0 \leqq x \leqq \boxed{\text{ア}}$ ， $0 \leqq y \leqq \boxed{\text{イ}}$

である。

問 2 方程式①を変形すると，

$$y=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x-\sqrt{x}+\boxed{\text{オ}}$$

となる。

そこで，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x-\sqrt{x}+\boxed{\text{オ}}$ $\left(0 \leqq x \leqq \boxed{\text{ア}}\right)$ と定めると，

$0<x<\boxed{\text{ア}}$ において，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$，および第二次導関数 $f''(x)$ は，

$$f'(x)=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{x}} \quad , \quad f''(x)=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}\,x\sqrt{x}}$$

となる。

問 3 **問 2** で定めた関数 $f(x)$ の増減と曲線 C の凹凸について述べた次の⓪～③の記述のうち，正しいものは $\boxed{\text{シ}}$ である。

⓪ $f(x)$ は区間 $0<x<\boxed{\text{ア}}$ で単調に増加し，曲線 C はその区間において上に凸である。
① $f(x)$ は区間 $0<x<\boxed{\text{ア}}$ で単調に増加し，曲線 C はその区間において下に凸である。
② $f(x)$ は区間 $0<x<\boxed{\text{ア}}$ で単調に減少し，曲線 C はその区間において上に凸である。
③ $f(x)$ は区間 $0<x<\boxed{\text{ア}}$ で単調に減少し，曲線 C はその区間において下に凸である。

問 4 $\mathrm{A}\left(0, \boxed{\text{イ}}\right)$，$\mathrm{B}\left(\boxed{\text{ア}}, 0\right)$ とすると，直線 AB と曲線 C で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字（０～９）または符号（－、±）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

（例）$\boxed{\text{アイウ}}$ に -83 と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ などが２度以上現れる場合、２度目以降は、$\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

（例）$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として

エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	−	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
カ	−	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$ 、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。