2022年度全学統一入学試験問題

数　学

（2月3日）

開始時刻　午前10時30分
終了時刻　午前11時40分

※　国語の問題は、本冊子の右開きのページにあります。

I　注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 合図があったら、必ず裏面の「Ⅱ　**解答上の注意**」をよく読んでから、解答してください。
3. この冊子は21ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
4. 数学か国語のどちらか1科目を選択し、該当する解答用紙を切り離して解答してください。2科目とも解答した場合は、すべて無効となります。

　　数　　学　1～ 4ページ

5. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督員の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

　①　受験番号欄

　　受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

　②　氏名欄

　　氏名とフリガナを記入してください。

6. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

（裏面へ続く）

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字（0～9）または符号（－、±）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

　（例） $\boxed{\text{アイウ}}$ に -83 と答えたいとき

ア	**⊖**	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	⊖	±	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9
ウ	⊖	±	0	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9

　なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

　（例） $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\dfrac{-4}{5}$ として

エ	**⊖**	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	⊖	±	0	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9
カ	⊖	±	0	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

　例えば、 $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。

$\boxed{1}$ aを正の定数として，2次関数$f(x)=2x^2-15ax+(28a^2+a-2)$を考える。

(1) $28a^2+a-2=\left(\boxed{ア}a-\boxed{イ}\right)\left(\boxed{ウ}a+\boxed{エ}\right)$と因数分解される。

(2) $f(x)=(2x-\boxed{オ}a-\boxed{カ})(x-\boxed{キ}a+\boxed{ク})$と表される。

(3) $y=f(x)$のグラフがx軸と接するのは，$a=\boxed{ケ}$のときである。

(4) $x=20$が不等式$f(x)<0$の解であるための必要十分条件は，定数aが

$$\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}<a<\frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}$$

を満たすことである。

(5) $a>\boxed{ケ}$とする。不等式$f(x)<0$を満たす整数xが1個だけであるような整数aは，小さい順に$a=\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$である。

2 2つの放物線 $C_1: y=x^2+3$，$C_2: y=-x^2-2x-2$ を考える。

(1) 放物線 C_1 上の点 $(t,\ t^2+3)$ における接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{ア}}\,tx-t^2+\boxed{\text{イ}}$$

である。

(2) (1)の接線と放物線 C_2 が共有点をもつとき，その x 座標は2次方程式

$$x^2+\left(\boxed{\text{ウ}}\,t+\boxed{\text{エ}}\right)x-t^2+\boxed{\text{オ}}=0$$

の実数解である。

(3) 2つの放物線 C_1，C_2 の共通接線は，傾きの小さい順に

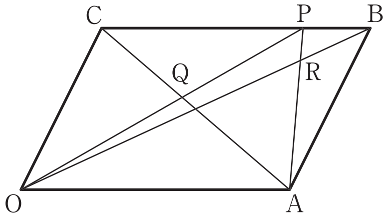
$$y=\boxed{\text{カキ}}\,x-\boxed{\text{ク}}，\quad y=\boxed{\text{ケ}}\,x+\boxed{\text{コ}}$$

となり，この2直線をそれぞれ l_1，l_2 とおくと，その交点は $\left(\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \boxed{\text{セ}}\right)$ である。

2直線 l_1，l_2 は放物線 C_1 と，それぞれ点 $\left(\boxed{\text{ソタ}},\ \boxed{\text{チ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}}\right)$ で接し，2直線 l_1，l_2 と放物線 C_1 とで囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

3

(1)　平行四辺形 OABC において，辺 BC を 1：3 に内分する点を P，直線 OP と対角線 AC の交点を Q，直線 AP と対角線 OB の交点を R とおく。



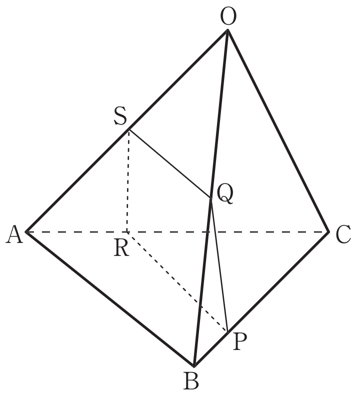
このとき△OAQ と $\boxed{\text{ア}}$ は，平行四辺形 OABC の形によらず，いつでも相似となる。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを下の①～④のうちから一つ選べ。

①　△OPC　　②　△OBC　　③　△PCQ　　④　△BCQ

このことから，点 Q は対角線 AC を $\boxed{\text{イ}}$ ： $\boxed{\text{ウ}}$ に内分することがわかる。ただし，$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は互いに素である 2 つの自然数とする。

また同様にして，点 R は対角線 OB を $\boxed{\text{エ}}$ ： $\boxed{\text{オ}}$ に内分することがわかる。ただし，$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ は互いに素である 2 つの自然数とする。

(2)　四面体 OABC において，辺 BC を 1：3 に内分する点を P，辺 OB の中点を Q，辺 AC を 1：2 に内分する点を R とおく。さらに，3 点 P，Q，R によって定まる平面と辺 OA の交点を S とおく。また，ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表す。



点 S は 3 点 P，Q，R によって定まる平面上にあるから，実数 s，t によって

$$\overrightarrow{OS} = (1-s-t)\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ} + t\,\overrightarrow{OR}$$

$$= \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}t\vec{a} + \frac{\boxed{\text{ク}} - s - \boxed{\text{ケ}}\,t}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b} + \frac{\boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}\,s + t}{\boxed{\text{スセ}}}\vec{c}$$

と表されるが，同時に定数 k により $\overrightarrow{OS} = k\vec{a}$ とも表されることから，$s = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$t = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ となることがわかる。したがって，点 S は辺 OA を $\boxed{\text{テ}}$ ： $\boxed{\text{ト}}$ に内分する。

ただし，$\boxed{\text{テ}}$ と $\boxed{\text{ト}}$ は互いに素である 2 つの自然数とする。

4 1個のさいころを何回か続けて投げ，出た目の合計が5以上になったら終了することにする。

(1) 1回目で終了するとき，目の出方は $\boxed{ア}$ 通りある。

(2) ちょうど2回目で終了するとき，目の出方は $\boxed{イウ}$ 通りある。

(3) ちょうど3回目で終了するとき，目の出方は $\boxed{エオ}$ 通りある。

(4) 終了するまでのすべての目の出方は $\boxed{カキ}$ 通りある。

(5) 3回目までに終了する確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサ}}$ である。

(6) ちょうど3回目に終了したとき，最後に出た目が2である確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}$ である。