2024年度一般入学試験問題

数　学（理工学部）

（2月14日）

開始時刻　午後1時00分
終了時刻　午後2時00分

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は5ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督員の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

   ① 受験番号欄
   受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

   ② 氏名欄
   氏名とフリガナを記入してください。

4. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ または $\boxed{5}$ を選択してください。
   （ $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します。）
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

※　解答上の注意は、裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

$\boxed{1}$

問１　$(x-3y)(x^2+9y^2)(x+3y)$を展開すると，$x^{\boxed{ア}}-\boxed{イウ}\,y^{\boxed{エ}}$となり，$x^6-56x^3-512$を因数分解すると，$(x+2)(x-4)\left(x^2-\boxed{オ}\,x+\boxed{カ}\right)\left(x^2+\boxed{キ}\,x+\boxed{クケ}\right)$となる。

問２　連立不等式 $\begin{cases} x-1<\left|\sqrt{3}-2\right| \\ \dfrac{1}{2}x-3<-\left|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\right| \end{cases}$ の解は，$x<\boxed{コ}-\sqrt{\boxed{サ}}$である。

問３　座標平面上の点A$(5,\ 12)$と円$x^2+y^2=9$上を動く点Pについて，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$の最小値は$\boxed{シス}$である。

問４　大小２個の正八面体のさいころを同時に投げるとき，出た目の和が７の倍数になる確率は$\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$である。ただし，正八面体のさいころには，１から８までの数字が各面に１つずつ書かれているものとし，どの目の出方も同様に確からしいとする。

問５　座標空間における３点A，B，Cについて，３つの線分OA，OB，OCはそれぞれ互いに原点Oで直交し，それぞれの長さはOA$=2$，OB$=4$，OC$=2$であるとする。

このとき，△ABCにおいて，AB$=\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}$であり，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$である。

$\boxed{2}$ 関数 $y = \dfrac{4}{3}(8^x + 8^{-x}) - \dfrac{13}{2}(4^x + 4^{-x}) - 13(2^x + 2^{-x})$ において，$t = 2^x + 2^{-x}$ とおく。

$8 = 2^{\boxed{ア}}$，$4 = 2^{\boxed{イ}}$ であり，$8^x + 8^{-x}$ と $4^x + 4^{-x}$ をそれぞれ t を用いて表すと，

$8^x + 8^{-x} = t^3 - \boxed{ウ}\,t$，$4^x + 4^{-x} = t^2 - \boxed{エ}$ となるので，y を t を用いて表すと，

$y = \dfrac{4}{3}t^3 - \dfrac{13}{2}t^2 - \boxed{オカ}\,t + \boxed{キク}$ となる。y を t で微分すると，

$$\boxed{ケ}\,t^2 - \boxed{コサ}\,t - \boxed{オカ} = \left(\boxed{ケ}\,t - \boxed{シス}\right)\left(t + \boxed{セ}\right)$$

となる。

一方で，$t = 2^x + 2^{-x}$ のとりうる値の範囲は $t \geqq \boxed{ソ}$ であるので，y は $t = \dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}$ のとき，

つまり，$x = \boxed{テ}$，または，$x = \boxed{トナ}$ のとき最小値をとる。

3 3つの自然数a，b，cが，不等式$a \leqq b \leqq c$ …①，かつ，関係式$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$ …②

を満たすとする。

このとき，$\dfrac{1}{a} \geqq \dfrac{1}{b} \geqq \dfrac{1}{c} > 0$であるから，$\dfrac{1}{a} < 1 = \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c} \leqq \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a} =$

$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{a}$となるので，$a$の値の範囲は$\boxed{\text{イ}} \geqq a \geqq \boxed{\text{ウ}}$である。

$a = \boxed{\text{イ}}$のとき，$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} = \dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c} \leqq \dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{b} = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{b}$，かつ，$\boxed{\text{イ}} \leqq b$であるから，

$b = \boxed{\text{キ}}$，$c = \boxed{\text{ク}}$となり，①と②を満たすa，b，cの組(a, b, c)は$\left(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}\right)$

の1個だけである。

同様に，$a = \boxed{\text{ウ}}$のとき，①と②を満たすa，b，cの組(a, b, c)の個数は，全部で$\boxed{\text{ケ}}$個

であり，それらのうち，cが最大となる組は$\left(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サシ}}\right)$である。

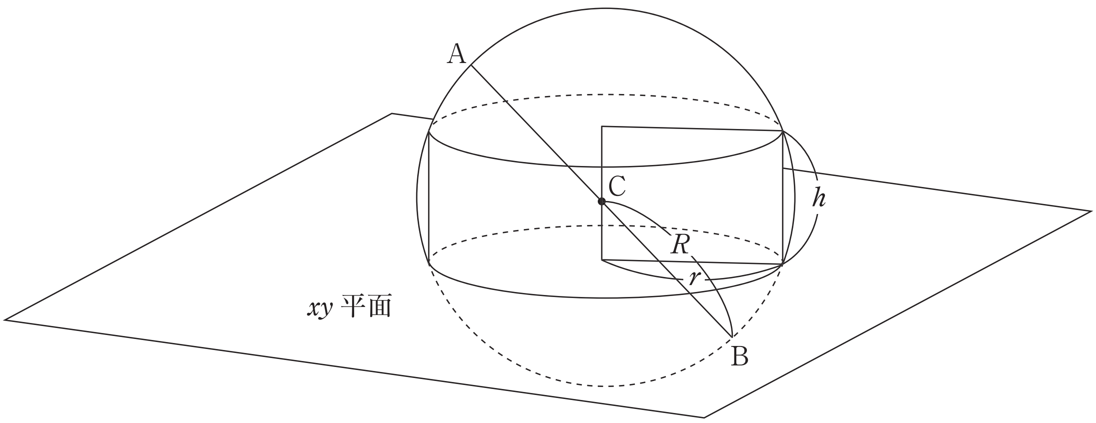
$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ のうちどちらか一方を選択して解答せよ。

$\boxed{4}$ 下の図のように，座標空間における2点 A(1，-1，9)，B(5，5，-3)を直径の両端とする球面の中心を C，半径を R とする。また，この球面と xy 平面が交わってできる円の半径を r とし，その円を底面として，この球面に内接する円柱の高さを h とする。

このとき，C の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ であり，$R = \boxed{\text{エ}}$ であるので，この球面の方程式は，$x^2 + y^2 + z^2 - \boxed{\text{オ}}\,x - \boxed{\text{カ}}\,y - \boxed{\text{キ}}\,z - \boxed{\text{クケ}} = 0$ である。

一方で，xy 平面の方程式は $z = \boxed{\text{コ}}$ であるから，この球面と xy 平面が交わってできる円の方程式は，$\left(x - \boxed{\text{サ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{シ}}\right)^2 = \boxed{\text{スセ}}$，$z = \boxed{\text{コ}}$ となるので，$r = \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

よって，$h = \boxed{\text{ツ}}$ であり，この円を底面とし，いま考えている球面に内接する円柱の体積は $\boxed{\text{テトナ}}\,\pi$ である。



$\boxed{5}$ n を自然数とし，a と b を定数とする。

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1} + x^2 - 2ax + 4b}{x^{2n} + 3}$$

とおく。$|x| < \boxed{\text{ア}}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \boxed{\text{イ}}$ が成り立ち，$|x| > \boxed{\text{ア}}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$ が成り立つので，

$$|x| < \boxed{\text{ア}} \text{ のとき，} f(x) = \frac{x^{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}}\,ax + \boxed{\text{オ}}\,b}{\boxed{\text{カ}}},$$

$$x = \boxed{\text{ア}} \text{ のとき，} f\left(\boxed{\text{ア}}\right) = \frac{\boxed{\text{キ}}\,a + \boxed{\text{ク}}\,b + \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},$$

$$x = -\boxed{\text{ア}} \text{ のとき，} f\left(-\boxed{\text{ア}}\right) = \frac{a + \boxed{\text{サ}}\,b}{\boxed{\text{シ}}},$$

$$|x| > \boxed{\text{ア}} \text{ のとき，} f(x) = \frac{\boxed{\text{ス}}}{x}$$

となる。

よって，関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して連続であるような，a と b の値はそれぞれ，

$a = \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。このとき，座標平面上において，$y = f(x)$ のグラフと

x 軸の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}} + \sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{　ア　}}$ 、$\boxed{\text{　イウ　}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字(０～９)または符号(－、±)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

　(例)　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	**⊖**	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	**⑧**	⑨
ウ	⊖	⊕	⓪	①	②	**③**	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

　なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{　ア　}}$ 、$\boxed{\text{　イウ　}}$ などが２度以上現れる場合、２度目以降は、$\boxed{\text{　ア　}}$ 、$\boxed{\text{　イウ　}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

　(例)　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として

エ	**⊖**	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
オ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	**④**	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
カ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	**⑤**	⑥	⑦	⑧	⑨

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

　例えば、$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$ 、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。