２０２４年度全学統一入学試験問題

数　　　学【理工学部】

（２月３日）

開始時刻　　午後１時00分
終了時刻　　午後２時00分

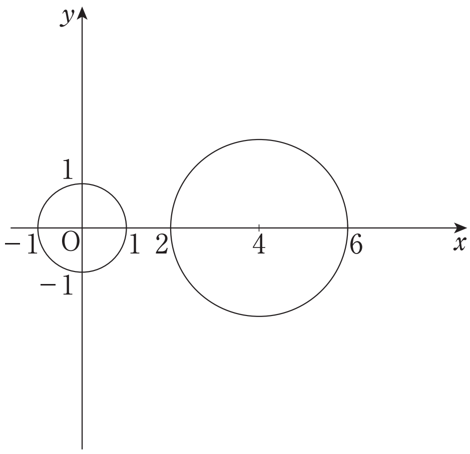
Ｉ　注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は５ページです。落丁，乱丁，印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督員の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしてください。
   ①　受験番号欄
   受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。
   ②　氏名欄
   氏名とフリガナを記入してください。
4. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ または $\boxed{5}$ を選択してください。
   （$\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します。）
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

※　解答上の注意は裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

1 座標平面上に2つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$，$C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 4$ がある。点Pは A(1，0)をスタートして円 C_1 上を反時計回りに角速度毎秒2ラジアンで，点QはB(6，0)をスタートして円周上を反時計回りに角速度毎秒1ラジアンで，それぞれ動くとする。(角速度とは，円の中心と円周上の点を結ぶ線分が1秒間に回転する角大きさのことを言う。)

2つの点P，Qは同時にスタートするものとする。



問 1 $t \geqq 0$ とするとき，点P，Qが同時にスタートしてから，t 秒後の点P，Qの座標は，それぞれ，

P $\left(\cos \boxed{\text{ア}}\,t,\ \sin \boxed{\text{ア}}\,t\right)$ ……①，

Q $\left(\boxed{\text{イ}}\cos t + \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{イ}}\sin t\right)$ ……②

である。

問 2 線分PQの長さの最大値，最小値を求めることを考える。

問 1の①，②を用いれば，$PQ^2 = \boxed{\text{エオカ}}\cos^2 t + \boxed{\text{キク}}\cos t + \boxed{\text{ケコ}}$ である。

ここで，$\cos t = s$ とおくと，$\boxed{\text{サシ}} \leqq s \leqq \boxed{\text{ス}}$ であり，

$$PQ^2 = \boxed{\text{エオカ}}\,s^2 + \boxed{\text{キク}}\,s + \boxed{\text{ケコ}}$$

$$= \boxed{\text{エオカ}}\left(s - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)^2 + \frac{\boxed{\text{タチツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$ と変形できるので，

線分PQの長さの最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

2 次の漸化式で定義された数列$\{a_n\}$について考える。

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_{n+1}{}^4 a_n{}^2 = 3 \quad , \quad a_n > 0 \, (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

問 1 $a_2 = \sqrt[\boxed{\text{ア}}]{\boxed{\text{イ}}}$，$a_3 = \sqrt[\boxed{\text{ウ}}]{\boxed{\text{エ}}}$ である。

問 2 $a_{n+1}{}^4 a_n{}^2 = 3$ より，

$\boxed{\text{オ}} \log_3 a_{n+1} + \boxed{\text{カ}} \log_3 a_n = \boxed{\text{キ}}$ となる。

（ただし，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ には最も簡単な整数を入れること。）

ここで，$b_n = \log_3 a_n$ とおくと，

$b_1 = \boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{オ}}\, b_{n+1} + \boxed{\text{カ}}\, b_n = \boxed{\text{キ}}$ となる。

$\boxed{\text{オ}}\, b_{n+1} + \boxed{\text{カ}}\, b_n = \boxed{\text{キ}}$ は，

$$b_{n+1} - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(b_n - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

と変形できるので，

数列$\{b_n\}$の一般項は，$b_n = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left\{\boxed{\text{タ}} - \left(\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)^{n-1}\right\}$ である。

したがって，$\log_3 a_n = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left\{\boxed{\text{タ}} - \left(\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)^{n-1}\right\}$ であるから，

数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_n = 3^{\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left\{\boxed{\text{タ}} - \left(\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)^{n-1}\right\}}$ である。

問 3 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt[\boxed{\text{ト}}]{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

3　AB = 4，BC = 6，CA = 5 である△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D，内心を I とし，$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とする。

問 1　$\vec{b} \cdot \vec{c} = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

問 2　線分 AD は∠A の二等分線であるので，

$\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$\overrightarrow{AD} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b} + \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{c}$ となる。

問 3　点 I は線分 AD 上にあるから，実数 k を用いて，$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AD}$ $(0 < k < 1)$ とおけるので，

$$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AD} = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}k\vec{b} + \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}k\vec{c} \cdots ①$$

となる。また，直線 CI は∠ C の二等分線であり，直線 CI と辺 AB との交点を E とすると，点 I は線分 CE 上にあるから，

実数 t を用いて，$\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CE}$ $(0 < t < 1)$ と表せる。このとき，

$\overrightarrow{CI} = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}t\vec{b} - t\vec{c}$ となることから，

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}t\vec{b} + \left(\boxed{ス} - t\right)\vec{c} \cdots ②$

となる。したがって，$\vec{b}$，$\vec{c}$ はともに $\vec{0}$ でなく，互いに平行でないので，

①，②より，k または t の値をそれぞれ求めることができる。

よって，$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\vec{b} + \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}\vec{c}$$

である。

問 4　AI : ID = $\boxed{テ}$: $\boxed{ト}$ である。

（ただし，$\boxed{テ}$: $\boxed{ト}$ は最も簡単な整数比で表すこと。）

$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ のうち，どちらか一方を選択して解答せよ。

$\boxed{4}$ k を実数の定数とし，放物線 $C: y=-2x^2+4x$，直線 $\ell: y=x+k$ が異なる2点で交わっているものとする。

問 1 k のとり得る値の範囲は，

$$k<\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$ である。

問 2 放物線 C と直線 ℓ の異なる2つの交点の x 座標を α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とおく。

β，k を α を用いて表すと，それぞれ，

$$\beta=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}-\alpha,\quad k=\boxed{\text{オカ}}\,\alpha^2+\boxed{\text{キ}}\,\alpha$$ である。

問 3 放物線 C と直線 ℓ の異なる2つの交点がともに第一象限にあるとき，放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれる部分の面積を S_1，放物線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の和を $S(\alpha)$ とし，$S(\alpha)$ を α を用いて表すと，

$$S(\alpha)=\boxed{\text{クケ}}\,\alpha^3+\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,\alpha^2-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\,\alpha+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$ である。

$S(\alpha)$ が最小になるのは，$\alpha=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときで，そのときの最小値は，$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

5 関数 $f(x) = xe^x$ について考える。

問 1 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(2,\ 2e^2)$ における接線の方程式は，

$y = \boxed{\text{ア}}\, e^{\boxed{\text{イ}}} x - \boxed{\text{ウ}}\, e^{\boxed{\text{エ}}}$ である。

また，直線 $y = \boxed{\text{ア}}\, e^{\boxed{\text{イ}}} x - \boxed{\text{ウ}}\, e^{\boxed{\text{エ}}}$ と x 軸との交点の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キ}} \right)$

である。

問 2 関数 $f(x)$ は，$x = \boxed{\text{クケ}}$ で，極小値をとる。また，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標は，

$x = \boxed{\text{コサ}}$ である。

問 3 **問 1** で求めた接線 $y = \boxed{\text{ア}}\, e^{\boxed{\text{イ}}} x - \boxed{\text{ウ}}\, e^{\boxed{\text{エ}}}$ と曲線 $y = f(x)$，および x 軸で囲まれた部分の面積は，$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} e^2 + \boxed{\text{セ}}$ である。

問 4 点 $(a,\ 0)$ から曲線 $y = f(x)$ に，異なる 2 本の接線が引けるような a の値の範囲を求めることを考える。ただし，$a \neq 0$ とする。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$y = \left(t + \boxed{\text{ソ}}\right) e^t x - t^2 e^t$ である。

これが点 $(a,\ 0)$ を通るので，$0 = \left(t + \boxed{\text{ソ}}\right) e^t a - t^2 e^t$ となる。

よって，$e^t \neq 0$ より，$t^2 - a\left(t + \boxed{\text{ソ}}\right) = 0 \cdots ①$となる。

点 $(a,\ 0)$ から引ける接線の本数は方程式①の実数解の個数に等しいので，

方程式①が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めればよい。

よって，求める a の値の範囲は，$a < \boxed{\text{タチ}}$，$\boxed{\text{ツ}} < a$ である。

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字（0～9）または符号（－，±）が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

（例）$\boxed{\text{アイウ}}$ に -83 と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

（例）$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	－	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
カ	－	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9

3. 根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。