2022年度一般入学試験問題

数　　学（理工学部）

（2月8日）

開始時刻　　午後1時00分

終了時刻　　午後2時00分

Ⅰ　注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 合図があったら、必ず裏面の「**Ⅱ　解答上の注意**」をよく読んでから、解答してください。
3. この冊子は5ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
4. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督員の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

　① 受験番号欄

　　受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

　② 氏名欄

　　氏名とフリガナを記入してください。

5. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ または $\boxed{5}$ を選択してください。

　（$\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します。）

6. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

（裏面へ続く）

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字（0〜9）または符号（－、±）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

（例） $\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、$\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

（例） $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として

エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	－	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
カ	－	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$ 、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。

1

(1)　等式 $4^m - 15 = n^2$ を満たす自然数 m，n の組は，$(m,\ n) = (\boxed{ア},\ \boxed{イ})$，$(\boxed{ウ},\ \boxed{エ})$である。ただし，$\boxed{ア} < \boxed{ウ}$とする。

(2)　四面体OABCにおいて，$OA = OB = OC = 3$，$AB = \sqrt{2}$，$AC = 1 + \sqrt{3}$，$\angle BAC = 45°$とする。また，点Oから平面ABCに下ろした垂線と平面ABCの交点をHとする。

このとき，$BC = \boxed{オ}$，$HA = HB = HC = \sqrt{\boxed{カ}}$，四面体OABCの体積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{キ}} + \sqrt{\boxed{クケ}}}{\boxed{コ}}$$

である。

(3)　$\alpha = 1 + 2i$，$\beta = -1 + 2i$ とするとき，

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{サシ},\quad \alpha^3 + \beta^3 = \boxed{スセ}\,i,\quad \alpha^4 + \beta^4 = \boxed{ソタチ}$$

である。

(4)　正の実数 x を用いて，2つの円の半径が $4x^2$ と x，これらの円の中心間の距離が $x^3 + 10$ と表されるとする。

この2つの円が外接するような x の値は，$x = \boxed{ツ}$，$\boxed{テ} + \sqrt{\boxed{ト}}$ である。

(5)　座標空間内の直線 l，m はそれぞれ実数 s，t を用いて，

$$l : (x,\ y,\ z) = s(1,\ -1,\ a)\quad ,\quad m : (x,\ y,\ z) = (-1,\ -3,\ 3) + t(4,\ -2,\ 3)$$

と表されるものとする。

l と m が1点で交わるとき，

$$a = \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$$

であり，交点の z 座標は $\boxed{ヌ}$ となる。

2 不等式 $\log_2 y \leqq \log_2(x-1)+\log_2(5-x)$ ……①について考える。

(1) 不等式①の両辺の対数において，真数がすべて正となる条件は，

$y>0$, $\boxed{ア}<x<\boxed{イ}$

であり，この条件のもとで不等式①を変形すると，

$y \leqq -x^2+\boxed{ウ}x-\boxed{エ}$

となる。

(2) $x=3$ のとき，不等式①を満たす実数 y のとりうる値の範囲は，

$0<y\leqq\boxed{オ}$

である。

また，$(x,\ y)$ が(1)の範囲全体を動くとき，不等式①を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ は全部で $\boxed{カキ}$ 組ある。

(3) 2次関数 $y=-x^2+\boxed{ウ}x-\boxed{エ}$ のグラフと直線 $y=x+k$ が接するような定数 k の値は，

$$k=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

であり，このときの接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ となる。

また，実数 x，y が不等式①を満たしながら動くとき，$y-x$ のとりうる値の範囲は，

$$\boxed{シス}<y-x\leqq\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

となる。

3 袋の中に白玉が1個と赤玉が2個入っており，次の操作を袋の中身が白玉3個になるまで繰り返す。

【操作】袋の中から無作為に1個の玉を取り出す。

取り出した玉が白玉ならば，その白玉を袋の中に戻す。

取り出した玉が赤玉ならば，その赤玉は袋に戻さず，代わりに白玉を1個袋に入れる。

袋の中身が白玉3個になった時点で終了とし，終了までに行った操作の回数を X とする。

(1) $X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

$X=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $X=4$ となる確率を求めよう。

1回目の操作で1個目の赤玉を取り出し，4回目の操作で2個目の赤玉を取り出す確率は，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

2回目の操作で1個目の赤玉を取り出し，4回目の操作で2個目の赤玉を取り出す確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

3回目の操作で1個目の赤玉を取り出し，4回目の操作で2個目の赤玉を取り出す確率は，$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

したがって，$X=4$ となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3) $X=4$ であったときに，2回目の操作で白玉を取り出している条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ のうちどちらか一方を選択して解答せよ。

$\boxed{4}$ 次の式で定まる関数 $f(x)$ について考える。ただし，a は実数の定数である。

$$f(x) = a + 3\int_{\frac{1}{2}}^{x} (4t^2 - 8t + 3)\,dt$$

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると，

$$f'(x) = \boxed{ア}\left(\boxed{イ}\,x^2 - \boxed{ウ}\,x + \boxed{エ}\right)$$

であるから，$f(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ で極小値，$x = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ で極大値をとる。

(2) $f(x)$ の極大値が 2 であるとき，定数 a の値は，$a = \boxed{ケ}$ である。

さらに，$f(x)$ の極小値は $\boxed{コ}$ となる。

(3) $a = \boxed{ケ}$ であるとき，

$$f(x) = \boxed{サ}\,x^3 - \boxed{シス}\,x^2 + \boxed{セ}\,x$$

である。

さらに，$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チツ}}$ である。

5 次の式で定まる関数$f(x)$について考える。ただし，$x > 0$とする。

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin t - 6\,t)^2\,dt$$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt = \frac{\pi^3}{\boxed{\text{アイ}}}$,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = \boxed{\text{エ}}$

である。

(2) (1)の結果より，

$$f(x) = \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}x - \boxed{\text{カキ}} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \times \frac{\pi^3}{x}$$

であるから，$f(x)$の導関数$f'(x)$を計算すると，

$$f'(x) = \frac{\pi\,(x^2 - \boxed{\text{コ}}\,\pi^2)}{\boxed{\text{サ}}\,x^2}$$

となる。

したがって，$x > 0$のとき，$f(x)$は$x = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,\pi$で最小となり，最小値は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,\pi^2 - \boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。